（論文）

振動法による薄板の張力分布同定技術

Identification of Tension Distribution of Thin Plate Based on Vibration Characteristics

在原広敏[*1]　Hirotoshi ARIHARA
岡田　徹[*1]（工博）　Dr. Toru OKADA

The quality improvement of steel sheets, aluminum sheets and copper sheets requires the highly accurate in-line measurement of tension distributions. Hence, an attempt was made to develop a technique for identifying the tension distribution of a thin plate on the basis of its natural frequency and vibration mode. This paper describes the new method that resulted from this attempt. A simplified dynamic model was constructed for a thin plate, using springs to model the tension distribution. The spring constant for the simplified model was calculated using the least-squares method from the measured modal parameters. This identification technique was applied to the vibration characteristics of an aluminum sheet. The identified tension distribution agrees well with that measured by strain gauges.

まえがき＝鉄板や銅板，アルミ板などの薄板生産ラインにおいて圧延や熱処理により薄板にはさまざまな形状不良が生じる。とくに圧延時にはロールのたわみや圧延前の板の形状，圧延中のロールプロフィールの影響を受けるため，板幅方向に伸びの差ができることがある。このような幅方向の伸び差（ひずみ分布）は無張力状態では板が座屈して板形状を悪化させ，中伸び，耳波など[1)]の形状不良となる。薄板製品の品質を確保するためには，このようなひずみ分布の大きさを管理してひずみを小さくすることが重要である。そのため，さまざまなラインに低コストで簡便に適用できるひずみ分布計測システムが求められている。

板幅方向の伸び差が内部応力の座屈により板形状として顕在化された状態であれば，レーザ式や渦電流式の変位計を用いた平坦度測定法，走査レーザを用いた光切断法[2)]などにより通板中の板形状を非接触で直接計測することが可能である。しかしながら，薄板ラインでは板の長手方向に一定の張力を付加しながら通板するのが一般的である。このため，ひずみ形状は張力により引き伸ばされて潜在化し，見かけ上は平坦な形状となることから，顕在化した形状の測定法は適用できない。このような潜在化した板形状を検出する方法として，分布しているひずみが引き伸ばされることで発生する板幅方向の張力分布を測定できる形状検出ローラが実用化されている[3)]。形状検出ローラはロールの幅方向にロードセルを埋め込んだ接触式の形状測定装置であり，計測機本体がロール形状で設置しやすいことから多くの圧延ラインに適用されている。一方で連続焼鈍ラインや亜鉛めっきラインなどの加熱帯や冷却帯への設置が困難という問題がある。

ところで，振動法により板の総張力を固有振動数から直接同定する方法が従来の研究において提案されており，比較的単純な理論と測定機器構成で非接触の計測が可能となっている[4)]。そこで，当社ではひずみ分布計測のため従来の振動法による張力同定法を発展させ，ひずみ分布を有する薄板の幅方向の固有振動数と振動モードより張力分布を求める方法を開発した。そのための基礎理論を構築し，開発した手法の妥当性を有限要素法（以下，FEMという）による解析と実験により検証した。

1．振動法による薄板の張力分布同定の基礎理論

本章では，本稿の基盤となっている張力分布同定理論[5)]について説明する。

1.1　薄板の振動現象の２次元的な簡易モデル

図１（a）に示すような幅方向にひずみ分布を有する

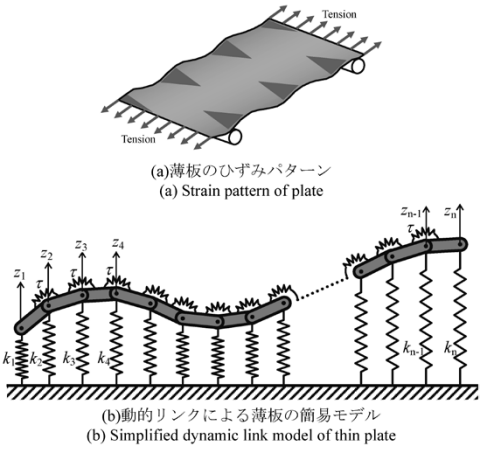


図１　薄板の張力パターンのモデル化
Fig. 1　Tensile pattern modelling of thin plate

[*1] 技術開発本部　機械研究所

薄板に対して長手方向に張力を付加した場合，ひずみの大きい部分の張力は低く，ひずみの小さい部分の張力は高くなる。幅方向には張力による幾何剛性分布が発生するから，これらを幅方向の等価剛性分布と見なし，図1(b)のようにモデル化することができる。ここで図1(b)に示すモデルにおいては，例えば薄板の圧延時において一定の圧延条件であれば，板の長手方向のひずみ分布は板を支持するロールの間隔内においてはほぼ一様と見なすことができる。そこで，FEMによる薄板の振動解析のための計算モデル（**図2**）を長手方向に張力分布が一様であるとした前提から，長手方向中央部の板の振動を表現する簡易モデルを作成した。簡易モデルでは幅方向の張力分布をばね分布でモデル化し，薄板を質量mと重心点回りの慣性モーメントJを持つ長さlの剛体要素をピンで連結したリンクモデルで表現した。幅方向に分布した振動変位zはlに対して十分に小さいとして要素の回転変位θを$z_{i+1}-z_i \fallingdotseq l\theta_i$と近似し，節点の自由度は$z$方向の並進自由度のみとした。したがって簡易モデルでは，薄板を幅方向に$n-1$等分割して節点を配置した場合は自由度nとなる。また，薄板の長手方向の曲げ剛性は十分小さいとして無視し，幅方向の曲げ剛性τを要素間の回転ばねとして，張力分布は各節点に配置したばね分布k_i（i=1～n）でモデル化した（図1（b））。

図1（b）に示した簡易モデルの運動方程式を式（1）に示す。式（1）中の$\mathbf{M}$は質量行列，$\mathbf{K}$は剛性行列，$\boldsymbol{z}$は各節点における変位ベクトルである。$\mathbf{K}_\tau$と$\mathbf{K}_T$はそれぞれ剛性行列の曲げ剛性成分と張力成分である。$\mathbf{K}_T$は同定対象となるばね分布k_i（i=1～n）を対角要素とする未知行列，$\mathbf{M}$および$\mathbf{K}_\tau$は板の寸法，物性より算出される既知行列である。

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{z}}+\mathbf{K}\boldsymbol{z}=\mathbf{0} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\boldsymbol{z}=\{z_1\ z_2\ \cdots\ z_n\}^T \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \frac{m}{4}+\frac{J}{l^2} & \frac{m}{4}-\frac{J}{l^2} & & & \\ \frac{m}{4}-\frac{J}{l^2} & 2\left(\frac{m}{4}+\frac{J}{l^2}\right) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2\left(\frac{m}{4}+\frac{J}{l^2}\right) & \frac{m}{4}-\frac{J}{l^2} \\ & & & \frac{m}{4}-\frac{J}{l^2} & \frac{m}{4}+\frac{J}{l^2} \end{bmatrix} \quad \cdots(3)$$

$$\mathbf{K}_\tau=\frac{1}{l^2}\begin{bmatrix} \tau & -2\tau & \tau & & & & \\ -2\tau & 5\tau & -4\tau & \tau & & & \\ \tau & -4\tau & 6\tau & \ddots & \ddots & & \\ & \tau & \ddots & \ddots & \ddots & \tau & \\ & & \ddots & \ddots & 6\tau & -4\tau & \tau \\ & & & \tau & -4\tau & 5\tau & -2\tau \\ & & & & \tau & -2\tau & \tau \end{bmatrix} \quad \cdots(4)$$

$$\mathbf{K}_T=\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}_\tau+\mathbf{K}_T \quad \cdots\cdots(6)$$

1.2　薄板の振動特性から張力分布を同定する方法

与えられた薄板の振動特性より張力分布を求める方法について述べる。具体的には，薄板の固有振動数と幅方向の振動モードから最小二乗法によりばね分布k_i（i=1～n）を求め，弦の方程式を利用して各節点における剛性値を個別に張力値に換算して張力分布を算出する方法である。

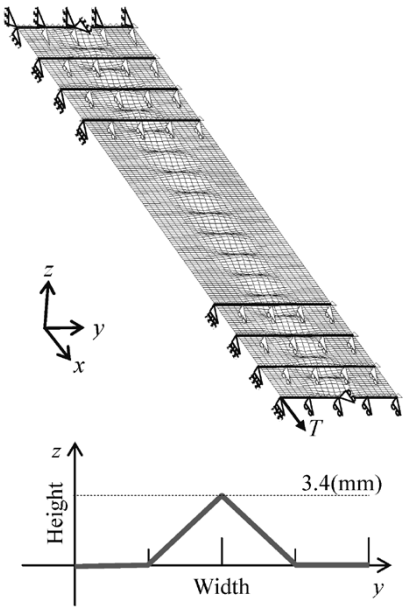


図2　中伸び板の有限要素モデル
Fig. 2　Finite element model of center buckled plate

薄板の固有振動数ω_i^2（i=1～p）を対角要素とする行列を$\mathbf{\Omega}^2$，対応するモードベクトルを列ベクトルとするモード行列を$\mathbf{\Phi}$とおくと式（7）の関係が成り立つ[6]。

$$\mathbf{M\Phi\Omega}^2=\mathbf{K\Phi} \quad \cdots\cdots(7)$$

式（7）に左側から$\mathbf{\Phi}^T$を乗じて整理すると既知の係数行列と未知のばね分布ベクトルとの積となる。ただし，$\mathbf{\Phi}^T$は$\mathbf{\Phi}$の転置行列である。

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1}^2 & \phi_{1,2}^2 & \cdots & \phi_{1,n}^2 \\ \phi_{1,1}\phi_{2,1} & \phi_{1,2}\phi_{2,2} & \cdots & \phi_{1,n}\phi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{1,1}\phi_{p,1} & \phi_{1,2}\phi_{p,2} & \cdots & \phi_{1,n}\phi_{p,n} \\ \hline \phi_{2,1}^2 & \phi_{2,2}^2 & \cdots & \phi_{2,n}^2 \\ \phi_{2,1}\phi_{3,1} & \phi_{2,2}\phi_{3,2} & \cdots & \phi_{2,n}\phi_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{2,1}\phi_{p,1} & \phi_{2,2}\phi_{p,2} & \cdots & \phi_{2,n}\phi_{p,n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \phi_{p,1}^2 & \phi_{p,2}^2 & \cdots & \phi_{p,n}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_1\omega_1^2-\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{K}_\tau\boldsymbol{\phi}_1 \\ -\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{K}_\tau\boldsymbol{\phi}_2 \\ \vdots \\ -\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{K}_\tau\boldsymbol{\phi}_p \\ \hline \boldsymbol{\phi}_2^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_2\omega_2^2-\boldsymbol{\phi}_2^T\mathbf{K}_\tau\boldsymbol{\phi}_2 \\ -\boldsymbol{\phi}_2^T\mathbf{K}_\tau\boldsymbol{\phi}_3 \\ \vdots \\ -\boldsymbol{\phi}_2^T\mathbf{K}_\tau\boldsymbol{\phi}_p \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\phi}_p^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_p\omega_p^2-\boldsymbol{\phi}_p^T\mathbf{K}_\tau\boldsymbol{\phi}_p \end{Bmatrix} \quad \cdots(8)$$

式（8）の未知ベクトルを最小二乗法で解けば，ばね分布を求めることができる。なお式（8）のpは張力分布の同定計算に用いたモードの数を表す。式（8）の左辺における係数行列を$\mathbf{\Phi}_k$，未知ベクトルを$\boldsymbol{k}_T$，右辺の既知ベクトルを$\boldsymbol{k}_\omega$とすると

$$\mathbf{\Phi}_k\boldsymbol{k}_T=\boldsymbol{k}_\omega \quad \cdots\cdots(9)$$

で表され，$\mathbf{\Phi}_k$の擬似逆行列により$\boldsymbol{k}_T$を求めることができる。求まったばね分布は次式により，張力値に変換する。

$$T_i=\frac{2L}{\pi^2}k_i \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad \cdots\cdots(10)$$

式（10）中のT_iは簡易モデルの節点iにおける張力値[N]，Lは支持ロール間隔[m]を示す。式（10）で計算された張力分布を合計することで総張力が求まる。また，式（10）により得られた張力は節点ごとの値であるので次式により要素ごとの値に変換する。

$$\hat{\boldsymbol{T}}=\left\{T_1+\frac{T_2}{2},\frac{T_2+T_3}{2},\cdots,\frac{T_{n-2}+T_{n-1}}{2},\frac{T_{n-1}}{2}+T_n\right\}^T \quad \cdots(11)$$

1.3 特異値分解による張力分布同定の高精度な数値計算法

ところで，計算に使用するモード数が少ない場合や幅方向の分割数が大きい場合は行列$\boldsymbol{\Phi}_k$のランクが不足し，式（9）の最小二乗解が不定となることがある。そこで，特異値分解を利用して望ましい解を求める方法について述べる。係数行列$\boldsymbol{\Phi}_k$は特異ベクトルを列ベクトルとする直交行列$\mathbf{P}$と$\mathbf{Q}$，特異値を対角成分に持つ対角行列$\mathbf{D}$を用いて

$$\boldsymbol{\Phi}_k=\mathbf{PDQ}^T \quad \cdots\cdots(12)$$

と分解できる[7]。$\mathbf{D}$を特異値の大きい部分行列$\mathbf{D}_s$と特異値の小さい部分行列$\mathbf{D}_n$に分けると$\boldsymbol{\Phi}_k$は

$$\boldsymbol{\Phi}_k=[\mathbf{P}_s\ \mathbf{P}_n]\begin{bmatrix}\mathbf{D}_s & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_s^T\\ \mathbf{Q}_n^T\end{bmatrix}\approx[\mathbf{P}_s\ \mathbf{P}_n]\begin{bmatrix}\mathbf{D}_s & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_s^T\\ \mathbf{Q}_n^T\end{bmatrix}=\mathbf{P}_s\mathbf{D}_s\mathbf{Q}_s^T \quad \cdots(13)$$

と近似できる。式（13）で特異値$\mathbf{D}_s$には必要な信号成分，微小な特異値$\mathbf{D}_n$にはノイズや計算誤差などにより生じる成分が含まれる。微小成分$\mathbf{D}_n$を除去した式（13）により，$\boldsymbol{\Phi}_k$の擬似逆行列は次式のように近似される。

$$\boldsymbol{\Phi}_k^{\dagger}=\mathbf{Q}_s\mathbf{D}_s^{-1}\mathbf{P}_s^T \quad \cdots\cdots(14)$$

式（14）で算出された$\boldsymbol{\Phi}_k^{\dagger}$を式（9）に用いることで実際の張力分布と一致する良好な同定結果を得ることができる。

1.4 FEMによる薄板の振動解析結果への張力分布同定法の適用

提案した張力分布同定理論を，FEMによる薄板の振動解析から得られる張力分布と比較して，計算精度を検証した結果について述べる。本稿では形状不良の一例として中伸びの場合について検証する。ここでいう中伸びとは，板幅方向の中央部の伸びひずみが座屈して周期的な波形状として顕在化した形状である。図2にひずみ分布として中伸びを設定したFEMモデルを示す。図2のFEMモデルは実モデルよりひずみ形状をわかりやすくするためz方向に10倍拡大している。

材料は板厚0.5mm，幅1,000mm，全長9,000mmのアルミ薄板とし，支持ロール間隔を4,500mmとした。アルミ板の密度は2,700kg/m^3，ヤング率は70GPa，ポアソン比は0.3とした。ひずみ分布の波形状は図2に示すとおり振幅3.4mmを最大値とした幅方向に直線的な分布とし，長手方向は周期500mmの正弦波となるような形状とした。板の長手方向の一端上の節点に対しては，z方向の変位を拘束するとともに，巻き取りリールあるいはペイオフリールにより一様に引っ張られる状態を模擬するために，x方向の変位が等しくなるような境界条件を与えた。これにより，板幅方向に分布する張力の総張力と等しくなるような張力を一つの節点に設定するだけで，幅方向に一様な強制変位を与えたことに相当する解析結果が得られる。また，反対側の板端部はx方向とz方向を拘束した単純支持とした。加えて，板の長手方向の6箇所において，通板ロールを模擬したz方向拘束を設定した。図2中の拘束は幅方向5箇所ずつ図示しているが，実際のモデルの拘束は幅方向の全節点である。y方向の拘束は，剛体モードを除去するために板端部中央の一節点だけに加えた。また，シェル要素を用いたFEMモデルのメッシュは一辺が50mmの正方形とした。

張力を4,900Nに設定して静解析を行い，得られた幾何剛性を考慮して固有値解析を行った。その結果を**図3**に示す。張力分布同定計算には長手方向中央部における幅方向の振動モードを使用した。**図4**に擬似逆行列を用いた場合，および式（14）に示した特異値分解を用いた場合の中伸び張力分布の同定結果を示す。同定計算には図3に示した1次から4次の幅方向振動モードを使用し，簡易モデルは11自由度とした。図4（a）に示すとおり，擬似逆行列を用いた最小二乗法（LSM）では同定結果に大きな誤差が生じているのに対し，特異値分解により絶対値の小さい特異値を除去した場合（SVD）はFEM結果とよく一致していることがわかる。図4（b）は係数行列$\boldsymbol{\Phi}_k$の特異値分解結果で10個の特異値のうちσ_8〜

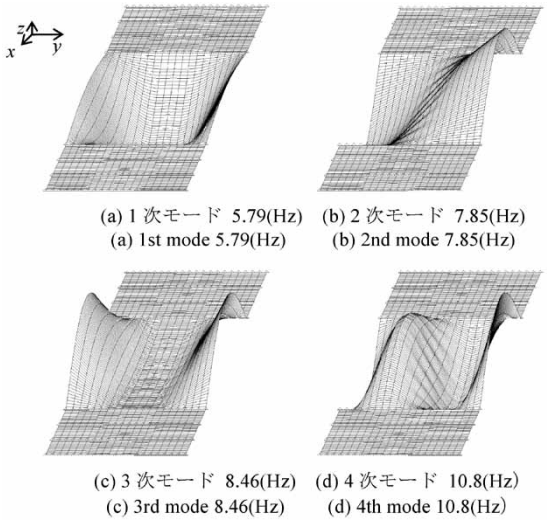


図3 中伸び薄板の振動モード

Fig. 3 Natural vibration mode of thin plate in the case of center buckle

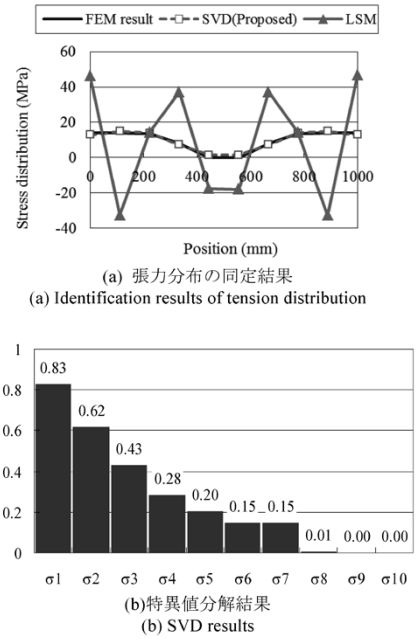


図4 最小二乗法と特異値分解法との比較

Fig. 4 Comparison between least squared method and proposed SVD method

σ_{10}は値がほぼ0となっており，式（13）の特異値は$\mathbf{D}_s$=diag（$\sigma_1,\cdots,\sigma_7$），$\mathbf{D}_n$=diag（$\sigma_8,\cdots,\sigma_{10}$）となる。擬似逆行列で大きな同定誤差を生じているのは，$\mathbf{\Phi}_k^{\dagger}$が計算される過程で特異値が大きい信号成分に対して相対的に特異値が小さい誤差成分が逆数$\mathbf{D}_n^{-1}$により拡大されたことが原因である。これに対して提案手法では，特異値の小さい誤差成分を分離し，同定計算をする際に除去しているため良好な結果を得ることができる。

2．空気の付加質量を考慮した振動法による薄板の張力分布の同定法

構造物の周囲に流体が存在する場合，構造物の振動特性は流体部の影響を受ける[8]。とくに空気中の薄板のように，流体と接する表面積が大きく板厚が薄い場合，周囲の流体の付加質量効果に対して板自体の質量が相対的に小さくなるため，空気が板の振動特性に与える影響が大きくなる。薄板の周囲に空気が存在することにより板の固有振動数は真空中よりも低くなり，板の振動モードも変化する。第1章は空気の存在を考慮しないFEMモデルによる解析であり，真空中と見なせる条件での固有振動数と振動モードを用いることで良好な同定結果が得られていた。しかし，実際に薄板の周囲に空気が存在する場合の同定精度を保証するためには，空気の付加質量についての検証が必要である。そこで本章では，新たに空気の付加質量をモデル化したFEM解析を行って同定精度への影響度を明らかにした。また，薄板に作用する空気の付加質量を算出し，張力分布同定用の簡易モデルに加えることで同定精度を改善する方法を開発した。

2.1　仮想質量法による付加質量を考慮した薄板のFEM振動解析

構造物の周囲に流体が存在する場合，構造物が振動すると構造部と流体部が接する面に圧力分布が発生する。接表面の単位加速度あたりの圧力分布のうち，加速度と同相成分を構造物に付加される質量分布と見なせば，流体の圧力効果を質量効果としてモデル化することができる。そこで本節では，空気の影響を考慮する方法として仮想質量法[9]を用いた場合について述べる。市販のFEM解析ソフトであるMSC NastranではVirtual mass機能により，仮想質量法による流体の付加質量効果を考慮した解析を行うことができる。なお，Virtual mass機能では流体の特性は非圧縮性の一様密度であり，表面波や粘性効果は考慮されていない。

空気の付加質量を算出するためのFEMモデルは第1章のアルミ薄板モデルと同様とした。周囲に存在する空気の付加質量効果について，仮想質量法で算出された付加質量行列の対角成分を薄板のFEMモデルの節点に対応させて図示したものを**図5**に示す。図5のx軸は板長手方向，y軸は板幅方向，z軸は付加質量の大きさを示す。ここで得られた付加質量行列から式（1）の質量行列を補正する質量行列$\hat{\mathbf{m}}_{add}$を求め，次式のように補正すると付加質量の影響を考慮した張力分布同定が可能となる。

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \hat{\mathbf{m}}_{add} \quad \cdots\cdots (15)$$

2.2　付加質量を考慮したFEMによる振動解析結果への張力分布同定法の適用

張力分布がフラットな場合について，FEM解析結果の固有振動数と振動モードおよび空気付加質量を考慮して張力分布同定した結果を**図6**に示す。固有値解析における空気付加質量は仮想質量法（Virtual mass）により与え，簡易モデルに加える付加質量行列は仮想質量法の計算値を用いた。板寸法や付加質量の特性などのFEM解析条件は前節で説明したモデルと同様である。

図6（a）は付加質量をモデル化したFEM解析結果の固有振動数と振動モードに対し，第1章の理論で同定した結果をWithout virtual mass，本章での提案手法により空気の付加質量を考慮して張力分布同定を行った結果をWith virtual massとして示している。比較のためFEMの静解析で得られた張力分布も一緒に示している。図6（a）より付加質量を考慮した場合はFEM解析で得られた実際の張力分布と同定値がよく一致していることがわかる。それに対し，付加質量を考慮しない場合は同定値がFEM解析値を大幅に下回る結果となった。図6

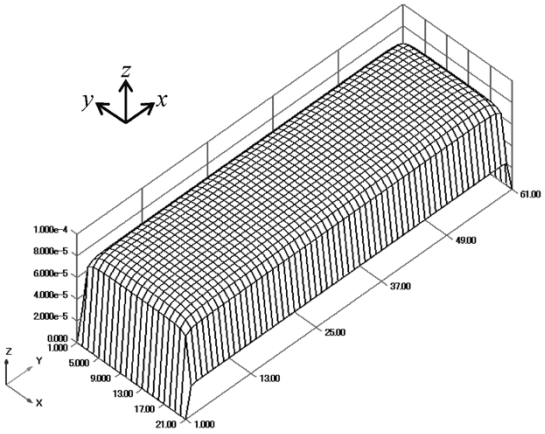
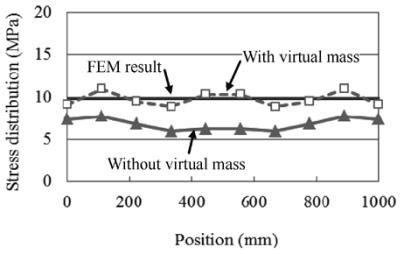
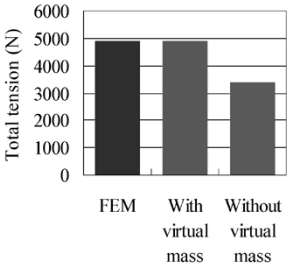


図5　付加質量分布の計算結果
Fig. 5　Calculation results of added mass distributions



(a)張力分布の同定結果
(a) Identification results of tension distribution



(b)総張力の同定結果
(b) Identification results of total tension

図6　フラットな薄板の有限要素モデルでの同定結果
Fig. 6　Identification results of finite element model for flat thin plate

(a) の張力分布より求めた板全体に作用する総張力値を図6 (b) に示す。付加質量を考慮した場合は総張力誤差が−0.4%と極めて高精度であったのに対し，付加質量を考慮しない場合は誤差が−30%と大幅に同定精度が悪化した。これは，材質が比較的密度が低いアルミであり，薄く幅広な板形状であるため板自体の質量に対して空気の付加質量効果が大きいためである。付加質量の影響度を固有振動数ごとに定量的に評価するため，簡易モデルについてモード分離を行い，モードごとに1自由度の振動系と見なした場合の等価的な質量であるモーダルマスを算出した。1次の固有振動数に対応するモーダルマスは付加質量を考慮することで88%増加し，2次の固有振動数に対応するモーダルマスは39%増加した。したがって，実際のアルミ薄板に張力分布同定技術を適用する場合は空気の付加質量の考慮は必須である。

なお，空気の付加質量は，板幅を直径とする円柱体積分の空気質量として簡易的に見積もる方法が知られている。その方法によれば，本章の解析モデルの場合は空気の付加質量は4.57kgであり，支持ロール間における板の質量の75%に相当する。例えば，板幅が100mmとなれば空気の付加質量は7.5%まで減少し，許容できる程度まで影響が小さくなる。一方，解析モデルと同じ寸法の鋼板であれば付加質量は板に対して26%となり，付加質量の考慮が必要と判断できる。このように，付加質量の簡易計算値と板の質量とを比較することで付加質量の考慮の要否を判断できる。

3. 実験による張力分布同定法の精度検証

3.1 薄板の振動特性測定用の実験装置および実験方法

振動特性測定に用いた実験装置の概要を**図7**に示す。測定対象である薄板は2本のロールで支持されており，薄板長手方向の板端部の片方は土台に固定されたクランプで固定し，もう片方のクランプは張力が負荷できるようにねじ機構で長手方向に可動するような構造とした。薄板は支持ロールの中央付近に設置したエアーノズルから噴射される圧縮空気によって非接触で加振され，その際の板振動を幅方向に配列した複数のレーザ変位計で計測した。

図8に計測システムの構成を示す。エアー加振では発信器から出力された加振信号を増幅器により増幅し，電磁弁を駆動する。電磁弁には工場エアーが供給されており，加振信号に従ってパルス状の圧縮空気を噴射し，加振周波数を連続的に変化（スイープ）させながら板の振動モードを励起させた。レーザ変位計からの板振動計測値はアナログ電圧信号として加振信号とともにデータロガーで計測した。ロガーで計測された振動データをパーソナルコンピュータに取り込み，伝達関数計算と偏分反復法[5]によるモード解析を行って薄板の固有振動数と幅方向の振動モードを求めた。得られた固有振動数と振動モードから式（8）を使って板幅方向の張力分布を同定した。また，張力分布同定値の妥当性を検証するために，ひずみゲージを幅方向に複数枚貼り付け薄板で発生している張力分布を計測した。

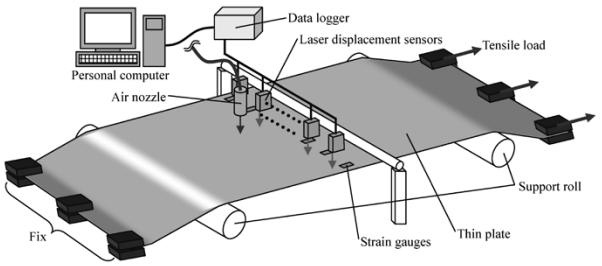


図7 実験装置の外観
Fig. 7 Overview of experimental equipment

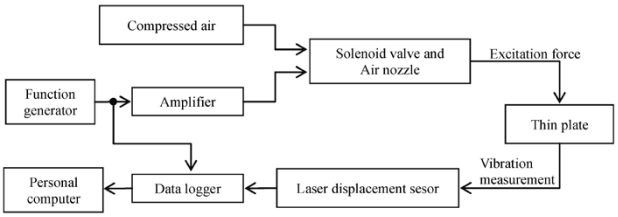


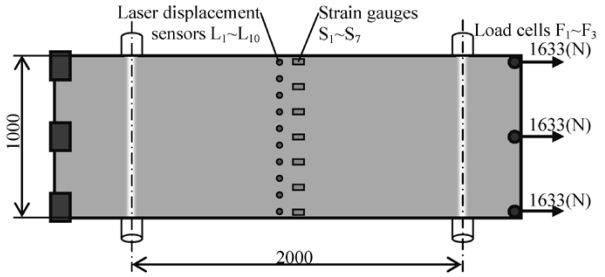
図8 計測システムの構成
Fig. 8 Measurement system configuration

3.2 薄板の振動特性測定結果と張力分布の同定結果

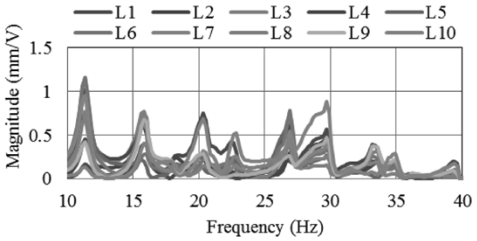
測定対象はアルミの薄板とし，ひずみがほとんどないフラットな板を用いた。エアー加振での加振周波数は板の固有振動数がある5～40Hzの範囲とし，スイープ時間は2分間とした。レーザ変位計による板振動測定点は幅方向に10箇所とし，板の両端から10mm内側の範囲で等間隔に配置した。また，ひずみゲージは，レーザ変位計と同様に板の両端から10mm内側の範囲で等間隔に7箇所貼り付けた。

図9 (a) にアルミ薄板の測定条件を示す。アルミ薄板の寸法は板厚0.3mm，板幅1,000mmでロール間隔を2,000mmとし，可動側クランプの3点に1,633Nずつ張力を負荷した条件で計測を行った。図9 (b) はスイープ加振により各レーザ変位計で測定した板振動の周波数応答である。10Hzから40Hzの間に複数のピークがみられ，板の固有振動数が存在することがわかる。図9 (c) は周波数応答より算出した1次から4次までの板の幅方向振動モードと固有振動数である。なお，振動モードの単位は無次元である。求めた幅方向振動モードと固有振動数を用いて第2章で述べた空気の付加質量を考慮した張力分布の同定を行った。

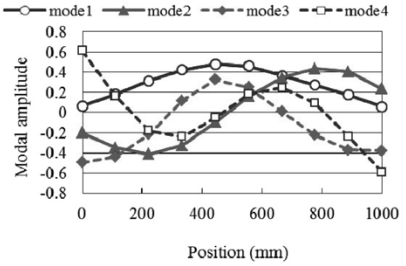
図10に図9 (c) の計測結果を用いて張力分布を同定した結果を示す。なお，図10 (a) では検証用ひずみゲージの測定値にアルミのヤング率70GPaを乗じた値を張力分布とし，比較のため張力分布同定結果も応力値に換算した値を示した。また，張力分布同定値は，MSC NastranのVirtual mass機能を用いて仮想質量法により算出した付加質量を用いた同定値（With virtual mass），および付加質量を考慮しないで同定した値（Without virtual mass）についてそれぞれ示した。図10 (a) より，ひずみゲージによる張力分布測定値と付加質量を考慮した同定結果がよく一致していることがわかる。それに対し，空気の付加質量を考慮しない場合は算出された応力値がひずみゲージによる計測値よりも低く，誤差が大きい結果となった。同定した張力分布から算出した総張力



(a)測定条件
(a)Measurement condition

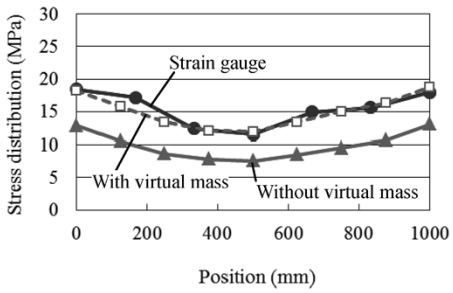


(b)周波数応答
(b) Frequency response function

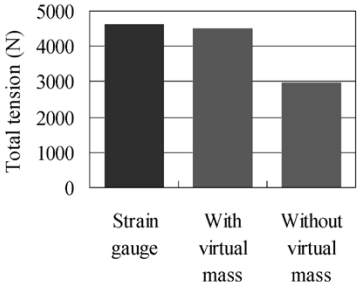


(c)1 次～4 次の振動モード
(c)1st～4th mode shape
(f_{n1}=11.3Hz，f_{n2}=15.8 Hz，f_{n3}=18.4 Hz，f_{n4}=20.3 Hz)

図9 フラットなアルミ薄板の振動特性計測結果
Fig. 9 Measurement results of vibration characteristics for flat aluminum thin plate



(a)張力分布
(a) Tension distribution



(b)総張力
(b) Total tension

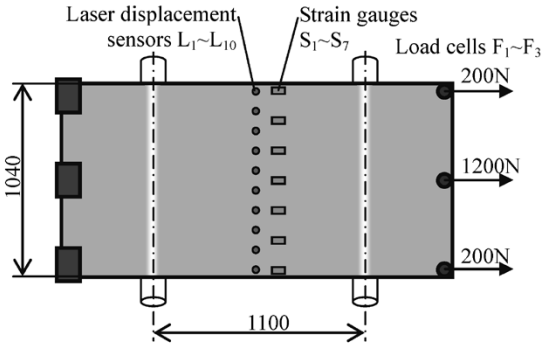
図10 フラットなアルミ薄板の張力分布と総張力の同定結果
Fig.10 Identification results of tension distribution and total tension for flat aluminum thin plate

を図10（b）に示す。付加質量を考慮した場合，ひずみゲージと同定値との差は3％程度となり，精度良く測定できている。一方，付加質量を考慮しない場合は総張力が大幅に低く同定された。

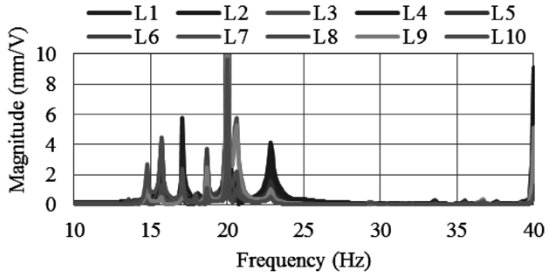
3.3 耳波ひずみのある薄板の張力分布同定結果

図11（a）に耳波状態のアルミ薄板の測定条件，図11（b），（c）に振動特性の測定結果を示す。アルミ薄板の寸法は板厚0.24mm，板幅1,040mmで，ロール間隔を1,100mmとした。3点の負荷張力は200N，1,200N，200Nとした。

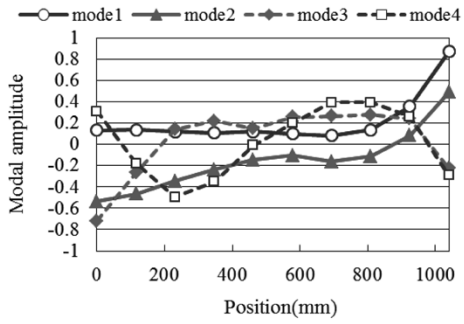
図11（c）の計測結果を用いて張力分布を同定した結果を**図12**に示す。図12（a）より耳波ひずみにより板幅方向両端部応力が下がる傾向が確認でき，ひずみゲージによる張力分布測定値と付加質量を考慮した同定結果が一致していることがわかる。図12（b）に示した総張力も測定値と付加質量を考慮した同定値がよく一致している。耳波状態においても空気の付加質量を考慮しないと誤差が大きい結果となった。



(a)測定条件
(a)Measurement condition

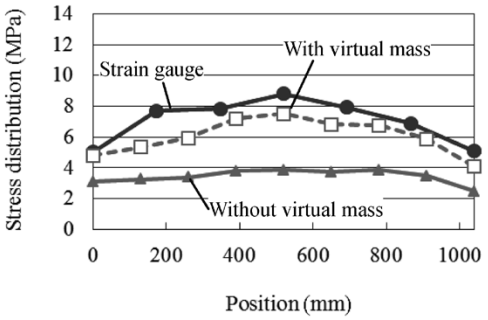


(b)周波数応答
(b) Frequency response function

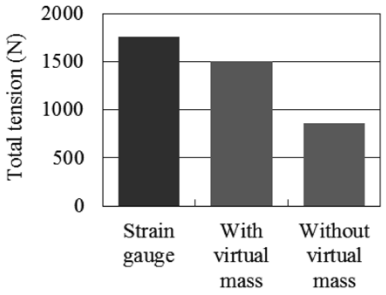


(c)1 次～4 次の振動モード
(c)1st～4th mode shape
(f_{n1}=14.8Hz，f_{n2}=15.7Hz，f_{n3}=17.1Hz，f_{n4}=18.1Hz)

図11 耳波ひずみのあるアルミ薄板の振動特性計測結果
Fig.11 Measurement results of vibration characteristics for edge buckled aluminum thin plate



(a)張力分布
(a) Tension distribution



(b)総張力
(b) Total tension

図12 耳波ひずみのあるアルミ薄板の張力分布と総張力の同定結果
Fig.12 Identification results of tension distribution and total tension for edge buckled aluminum thin plate

むすび=当社では，ひずみのある薄板の振動特性から幅方向の張力分布を同定する技術を開発し，以下の結果を得た。

（1）薄板を長手方向に縮小した簡易モデルを作成し，固有振動数と振動モードから最小二乗法により張力分布を求めることができる張力分布同定理論を提案した。これにより，板全面ではなく幅方向の振動モードのみの少ない計測点と計算量で張力分布を同定することが可能となった。さらに，簡易モデルは板の寸法と物性より作成できるため，鉄や銅，アルミ，その他の材料も含めた広範な薄板製品に適用することが可能である。

（2）計測点と比較して同定計算に使用する振動モード数が少ない場合でも，特異値分解を利用することで張力分布の計測点数を減らすことなく良好な同定結果を得られる方法を示した。

（3）提案手法を検証するため，代表的なひずみ分布である中伸びを再現した薄板のFEMモデルを作成した。このFEMモデルを用いて，張力を付加した状態の固有振動数と幅方向の振動モードを解析し，張力分布同定技術を適用した。その結果，FEMの静解析より得られた張力分布と提案手法による同定結果がよく一致し，本手法の妥当性が確認された。

（4）薄板の周囲に存在する空気の付加質量効果を仮想質量法で考慮した固有値解析を行い，アルミの薄板においては空気の付加質量が板の振動特性に大きな影響を与えることを明らかにした。そこで，仮想質量法により求めた付加質量行列を用いて簡易モデルの質量行列を補正する張力分布同定手法を開発した。開発手法をFEMによる薄板の振動解析結果に適用し，本手法により空気の付加質量が作用する場合の同定精度が大幅に改善することを確認した。

（5）開発した技術を実験で検証するため，張力が負荷された薄板に対して圧縮空気の噴射によるエアー加振とレーザ変位計による板振動計測を行い，板幅方向の振動モードと固有振動数を計測した。測定した板の振動特性に対して付加質量を考慮した張力分布同定法を適用し，張力分布を同定した。ひずみゲージによる計測値と付加質量を考慮した同定値がよく一致することを確認し，本手法の有効性を明らかにした。

参　考　文　献

1） 日本塑性加工学会編. 矯正加工. コロナ社, 1992, p.25.
2） 松井健一ほか. 熱間圧延用平坦度計の実用化. The Iron and Steel Institute of Japan. 1988, p.1817-1823.
3） 細川晴行ほか. 板形状検出装置（FI）／自動形状制御装置（AFC）". R&D神戸製鋼技報. 2009, Vol.59, No.3, p.61-65.
4） 上田宏樹ほか. 振動法による非接触板張力計測技術. R&D神戸製鋼技報. 2006, Vol.56, No.1, p.59-63.
5） 在原広敏ほか. 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発. 日本機械学会論文集C編. 2012, Vol.78, No.787, p.812-825.
6） 長松昭男. モード解析. 倍風館, 1985, p.56-57.
7） 三澤正吉ほか. 特異値分解のシステム同定への適用. 日本機械学会論文集C編. 1999, Vol.65, No.634, p.2235-2242.
8） 杉本理恵ほか. 圧縮性流体への音響放射による付加質量および付加減衰に関する研究. 日本機械学会D&D'97講演論文集. 1997, No.97-10-1, p.89-92.
9） 在原広敏ほか. 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発（空気の付加質量効果を考慮した張力分布同定法）. 日本機械学会論文集C編. 2013, Vol.79, No.803, p.2424-2437.